

THE COLLATZ CONJECTURE AND THE R.CRANDAL CONJECTURE

By Aeberhard Eric (09.01.2015)

<http://www.yatus.net/conjecturedesyracuse.pdf>

Abstract

I propose in this paper to solve the Collatz conjecture resulting from the resolution of the extended R.Crandal conjecture also known as conjecture $qx \pm 1$. With the Graph theory and the Schnirelmann density, we prove that every tree is a rooted tree whose nodes are subsets.

Résumé

Dans cet article, je propose de résoudre la conjecture de Collatz résultant de la résolution de la conjecture étendue de R.Crandal aussi appelé conjecture $qx \pm 1$. Avec la théorie des graphes et la densité de Schnirelmann, on démontre que chaque arbre est une arborescence dont les noeuds sont des sous-ensembles.

Table des matières

1.	- Introduction	2
2.	- Généralisation de l'arborescence	2
2.1.	- La fonction réciproque $S^{-1}(x)$	2
2.2.	- Densité de Schnirelmann	3
2.3.	- Une arborescence bien fondée (forme général)	4
2.3.1.	- Les noeuds de l'arborescence	4
2.3.2.	- Les relations entre degrés de l'arborescence	4
3.	- Etude de l'arborescence quand $q = 1$ (schéma 1)	5
3.1.	- Une densité de Schnirelmann de $\mathbb{N}^*$	5
3.2.	- Une arborescence bien fondée	5
3.2.1.	- Les noeuds de l'arborescence	5
3.2.2.	- Les relations entre degrés de l'arborescence	5
3.3.	- $f(x) = x - 1$	5
3.4.	- $f(x) = x + 1$	6
4.	- Etude de l'arborescence quand $q = 3$ (schéma 2)	7
4.1.	- Une Densité de Schnirelmann $\rightarrow \mathbb{N}^*$	7
4.2.	- Une arborescence bien fondée	7
4.2.1.	- les noeuds de l'arborescence	7
4.2.2.	- Les relations entre degrés de l'arborescence	7
4.3.	- $f(x) = 3x - 1$	8
4.4.	- $f(x) = 3x + 1$ (Conjecture de Syracuse)	9
5.	- Etude de l'arborescence quand $q = 5$ (schéma 3)	11
5.1.	- Une Densité de Schnirelmann $\rightarrow \frac{1}{2}$	11
6.	- Conjecture de R.Crandal ($q \rightarrow \infty$)	12
6.1.	- $q = 1$	12
6.2.	- $q > 1$	12
7.	- Schéma 1	15
8.	- Schéma 2	16
9.	- Schéma 3	17

1. Introduction

La conjecture de Syracuse ou aussi appelé conjecture de Collatz ou conjecture $3x+1$ est un sous-problème de la fonction générale $S(x)$ décrites ci-dessous.

$$(1) \quad S(x) = \begin{cases} g(x) = \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ f(x) = qx \pm 1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

La fonction $S(x)$ décrit une suite mathématique pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ sur lequel on applique par récurrence selon une procédure arithmétique assez simple, une fonction mathématique différente en fonction que le nombre entier soit pair ou impair.

- Si le nombre est pair "divisez le par 2"
- Si le nombre est impair "multipliez le par q et additionnez/soustrayez 1"

La conjecture de Syracuse affirme que quand $f(x) = 3x+1$ toutes suites de nombre construites selon les deux opérations de la fonction $S(x)$ ci-dessus finissent obligatoirement avec un cycle $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ et quel que soit le point de départ. Le problème posé est donc de savoir pour quelle paramètre de $f(x)$ le domaine de définition suivant est vrai:

$$(2) \quad S : \mathbb{N}^* \rightarrow 2^n$$

2. Généralisation de l'arborescence

2.1 La fonction réciproque $S^{-1}(x)$

Le graphe ou arbre de Collatz (*schéma 1*) est connu comme un arbre mathématique infini qui se construit à partir de la fonction $S(x)$ quand $f(x) = 3x+1$ depuis la racine en partant de 1 et en remontant inversement au problème de Syracuse de proche en proche. Avec l'arbre de Collatz, chaque entier est un noeud et a un antécédant ou deux mais jamais plus.

En théorie des graphes, une arborescence est un arbre qui comporte un sommet distingué appelé racine de l'arbre. Dans le problème de Syracuse, il est important de ne pas voir cet arbre comme un unique arbre mathématique mais comme une arborescence constituée par un assemblage d'ensemble dénommé sous-ensemble de Syracuse et correspondant au noeud de l'arbre.

La forme de cette arborescence varie en fonction de la variable q de la fonction $f(x) = qx \pm 1$ (avec q un nombre impair)

Quand $q = 1$ (Schéma 2)

Quand $q = 3$ (Schéma 3)

Quand $q = 5$ (Schéma 4)

...

La construction de cette arborescence se fait en parcourant le chemin inverse au problème avec la fonction réciproque des deux opérations ou fonction décrites par la fonction principale $S(x)$ soit :

$$(3) \quad S^{-1}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) : \mathbb{I}_d \rightarrow \mathbb{H}_d, & x \rightarrow 2^n x \\ f^{-1}(x) : \mathbb{H}_{d-1} \cup \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{I}_d, & x \rightarrow \frac{x \pm 1}{q} \end{cases}$$

Avec $\mathbb{H}_d$ l'ensemble des éléments de chaque degré. La fonction $g^{-1}(x)$ construit chaque degré de l'arborescence par le produit de 2^n avec l'ensemble $\mathbb{I}_d$. Avec: $h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$, la fonction général $h_d^{-1}(x)$ ci-dessous définit chaque degré de l'arborescence:

$$(4) \quad h_d^{-1} : \mathbb{H}_{d-1} \rightarrow \mathbb{H}_d, \quad x \rightarrow 2^n \frac{x \pm 1}{q}$$

Avec comme ensemble de départ:

$$(5) \quad \mathbb{I}_0 = \{1\}$$

L'arborescence peut-être exprimés par la composition de fonction ci-dessous et avec $x \in \mathbb{H}_0$

$$(6) \quad h^{-d}(x) = h_d^{-1} \circ h_{d-1}^{-1} \circ \dots \circ h_3^{-1} \circ h_2^{-1} \circ h^{-1}(x)$$

2.2 Densité général de Schnirelmann

Une arborescence se compose d'un sommet dénommé racine de l'arborescence, soit $\mathbb{H}_0$ dans nos exemples de digraphes (schéma 2, 3, 4) et l'ensemble des éléments de l'arborescence $\mathbb{G}$ est la somme de chaque rang ou profondeur des sommets et dénommés degré de l'arborescence.

$$(7) \quad \mathbb{G} = \sum_{d=0}^{\infty} \mathbb{H}_d = \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + \dots + \mathbb{H}_d$$

L'ensemble $\mathbb{H}_0$, racine de l'arborescence a pour densité asymptotique :

$$(8) \quad \bar{d}(\mathbb{H}_0) = \underline{d}(\mathbb{H}_0) = d(\mathbb{H}_0) = \frac{1}{a}$$

Chaque degré de l'arborescence représenté par les ensembles $\mathbb{H}_d$ ont pour densité asymptotique :

$$(9) \quad \bar{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d) = d(\mathbb{H}_d) = \frac{1}{q}$$

$\forall d \quad \bar{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d)$, la densité de Schnirelmann pour chaque degré de l'arborescence est définie comme :

$$(10) \quad \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

La somme des densités de Schnirelmann de chaque degré de l'arborescence se définit comme :

$$(11) \quad \sum_{d=0}^{\infty} \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \lim_{x \in \mathbb{H}_1 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_1(x)}{x} + \dots + \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

Sachant que $d(\mathbb{H}_0) \neq d(\mathbb{H}_d)$ alors :

$$(12) \quad \sum_{d=0}^{\infty} \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

La densité de Schnirelmann de l'ensemble $\mathbb{G}$ correspond à :

$$(13) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{G}(x)}{x}$$

$$(14) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{d=0}^{\infty} \sigma(\mathbb{H}_d)}{x}$$

$$(15) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}$$

Selon (6) alors:

$$(16) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d)$$

2.3 Une arborescence bien fondée

On dit que $(\mathbb{G}, \mathfrak{R})$ est une arborescence bien fondée si la relation $\mathfrak{R}$ induite par $S^{-1}(x)$ n'admet aucune chaîne décroissante infinie et qu'il n'existe pas de suite infinie.

Les arborescences ou digraphes structurés(*1) $\vec{\Gamma} = (\mathbb{G}; \vec{E})$ se distinguent ici par les deux fonctions de $S^{-1}(x)$ c-à-d par les noeuds de l'arborescence et les degrés d l'arborescence.

(*1) Une arborescences structurés signifie ici que le rapport entre chaque type de sous-ensemble de Syracuse est constant (voir schéma)

2.3.1 Les noeuds de l'arborescence

Soit (k_d) un élément $\in \mathbb{I}_d$ qui par définition est un nombre impair. Avec (4) tous les éléments de $\mathbb{H}_d$ appartiennent à des suites de forme :

$$(17) \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = k_d 2^n$$

On remarque que ce sont toutes des suites géométrique strictement décroissante et donc bien fondée car pour chaque suite $\in \mathbb{H}_d$:

$$(18) \quad u_{n+1} > u_n$$

2.3.2 Les relations entre degrés de l'arborescence

Avec k_d un élément $\in \mathbb{I}_d$ et k_{d+1} un élément $\in \mathbb{I}_{d+1}$ alors les relations de deux éléments impairs entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont de forme :

$$(19) \quad \frac{(k_d 2^n \pm 1)}{q} = k_{d+1}$$

3. Etude de l'arborescence quand $q = 1$

3.1. Une densité de Schnirelmann de $\mathbb{N}^*$

Quand $q = 1$, tous les éléments de l'ensemble racine ainsi que tous les éléments de chaque degré sont solution de la fonction réciproque $f(x) = x \pm 1$

Avec (8)

$$(20) \quad \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

Avec (9)

$$(21) \quad \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} = \frac{1}{q} = \frac{1}{1} = 1$$

Soit avec (16) et (6)

$$(22) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1) = 1$$

$$(23) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2) = 1$$

$$(24) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_3 \oplus \dots) = 1$$

$$(25) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) = 1$$

Selon le théorème de Schnirelmann alors :

$$(26) \quad \text{Si } \sigma(\mathbb{G}) = 1 \text{ alors } (\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) = \mathbb{N}^*$$

3.2 Une arborescence bien fondée

3.2.1 Les noeuds de l'arborescence

Selon (18) tous les noeud sont bien fondés.

3.2.2 Les relations entre degrés de l'arborescence

Selon (19), la fonction $f(x) = x \pm 1$, a pour relation entre deux éléments k_d et k_{d+1}

$$(27) \quad \frac{(2^n k_d \pm 1)}{1} = k_{d+1}$$

Soit :

$$(28) \quad 2^n k_d \pm 1 = k_{d+1}$$

3.3. $f(x) = x - 1$

Quand $n \rightarrow 1$

$$(29) \quad 2k_d + 1 = k_{d+1}$$

Il resulte $\forall n$

$$(30) \quad k_{d+1} > k_d$$

1. Toutes les branches de l'arbre composée par les suites U_n qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence créer par toutes les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} , c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré sont bien fondées (30)
3. L'arborescence recouvre l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (26)

Conclusion : Ces trois point suffisent à conclure que la conjecture pour $f(x) = x - 1$ est vrai car le domaine de définition : $S^{-1} : 2^n \rightarrow \mathbb{N}^*$ est vrai

3.4. $f(x) = x + 1$

Quand $n \rightarrow 1$

$$(31) \quad 2k_d - 1 = k_{d+1}$$

Il resulte $\forall n$

$$(32) \quad k_{d+1} \geq k_d$$

En effet, car quand $k_d = 1$ alors $k_{d+1} = 1$

Avec : $f(1) : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{H}_0$. Il existe donc une boucle; toutefois l'ensemble de départ et d'arrivée de $f(1) = x + 1$ correspond au même ensemble $\mathbb{H}_0$ c-à-d la racine de l'arborescence.

1. Toutes les branches de l'arbre composée par les suites (u_n) qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence créé par toute les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} ; c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré sont bien fondé (32) car la seule boucle est incluse dans l'ensemble $\mathbb{H}_0$
3. L'arborescence recouvre l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (26)

Conclusion : Ces trois points suffisent à conclure que la conjecture pour $f(x) = x + 1$ est vrai car le domaine de définition : $S^{-1} : 2^n \rightarrow \mathbb{N}^*$ est vrai

4. Etude de l'arborescence quand $q = 3$

4.1. Une densité de Schnirelmann $\rightarrow \mathbb{N}^*$

Quand $q = 3$, l'ensemble racine $\mathbb{H}_0$ admet un élément sur deux comme solution de la fonction réciproque $f(x) = 3x \pm 1$ par contre pour les ensembles composés des éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ n'admet qu'un élément sur trois.

Avec (8) la densité de Schnirelmann pour $\mathbb{H}_0$:

$$(33) \quad \sigma(\mathbb{H}_0) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

Avec (9) la densité de Schnirelmann pour chaque degré de l'arborescence $\mathbb{H}_d$:

$$(34) \quad \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

Soit avec (16) et (6)

$$(35) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$(36) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

$$(37) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_3 \oplus \dots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$(38) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \rightarrow 1$$

Selon le théorème de Schnirelmann :

$$(39) \quad \text{Si } \sigma(\mathbb{G}) \rightarrow 1 \text{ alors } (\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \rightarrow \mathbb{N}^*$$

4.2. Une arborescence bien fondée

4.2.1. Les noeuds de l'arborescence

Selon (18) tous les noeuds sont bien fondés.

4.2.2. Les relations entre degrés de l'arborescence

Pour la fonction $f(x) = 3x \pm 1$, la relation entre deux éléments (k_d) et k_{d+1} est :

$$(40) \quad \frac{2^n k_d \pm 1}{3} = k_{d+1}$$

$$(41) \quad 2^n k_d \pm 1 = 3k_{d+1}$$

Quand $n \rightarrow 2$ les suites incluses entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont de forme:

$$(42) \quad 4k_d \pm 1 = 3k_{d+1}$$

$$(43) \quad k_d < k_{d+1}$$

Toutefois quand $n = 1$ toutes les suites incluses entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont de forme:

$$(44) \quad 2k_d \pm 1 = 3k_{d+1}$$

$$(45) \quad k_d \geq k_{d+1}$$

Il en résulte que toutes les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} c-à-d entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont bien fondées tant que $n \geq 2$ car $k_d < k_{d+1}$. Il ne reste donc plus qu'à étudier les suites de relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} quand $n = 1$

$$(46) \quad k_{d+1} = \frac{2k_d \pm 1}{3}$$

$$(47) \quad k_{d+2} = \frac{4k_d \pm 5}{9}$$

$$(48) \quad k_{d+3} = \frac{8k_d \pm 19}{27}$$

$$(49) \quad k_{d+4} = \frac{16k_d \pm 65}{81}$$

...

Soit $(b_n) = 3^n - 2^n$ ainsi que $f^{k_n} \circ f^k(x) = \frac{2^{n+1} \pm (b_{n+1})}{3^{n+1}}$. Ainsi toutes les relations entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sachant que $k_d > k_{d+1}$ peuvent se représenter selon l'équation ci-dessous :

$$(50) \quad k_d = \frac{3^n k_{d+n} \pm (b_n)}{2^n}$$

4.3. $f(x) = 3x - 1$

S'il existe un ou plusieurs cycles alors elle/s existe/nt à partir de la racine d'un ensemble sur un élément pair d'un élément de la même arborescence, soit :

$$(51) \quad 3k_d - 1 = 2^m k_{d+n}$$

Et avec (50)

$$(52) \quad k_d = \frac{3^n k_{d+n} - 3^n + 2^n}{2^n}$$

En mettant en relation les deux équations précédentes (51) et (52), on obtient :

$$(53) \quad 3 \frac{3^n k_{d+n} - 3^n + 2^n}{2^n} - 1 = 2^m k_{d+n}$$

(m) correspond au nombre de saut dans un ensemble et (n) correspond au nombre saut/degré d'un ensemble/arborescence à un autre :

$$(54) \quad \frac{3 \cdot 3^n k_{d+n} - 3 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n}{2^n} - \frac{2^n}{2^n} = 2^m k_{d+n}$$

...

$$(55) \quad k_{d+n} = \frac{2^{n+1} - 3^{n+1}}{2^{n+m} - 3^{n+1}}$$

Sachant que $a^n - b^n$ est divisible par $(a - b)$ pour toutes les puissance n impaires et par $(a + b)$ pour les puissances n paires alors :

$$(56) \quad k_d = 1 \text{ et } k_d = 5$$

Soit comme cycle quand $k_d = 1 : 1 \rightarrow 2$

et quand $k_d = 5 : 5 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 20 \rightarrow 10$

Nous avons donc deux arborescences distinct car il existe deux cycles, la première avec comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble $\mathbb{H}_0$ car $f(1) : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{H}_0$ c-à-d la racine de l'arborescence et la deuxième avec $f(5) : \mathbb{H}_d \rightarrow \mathbb{H}_{d+1}$ comme ensemble de départ un sous-ensemble de Syracuse $\mathbb{H}_d : x \in \mathbb{H}_d | \exists n \in \mathbb{N}^*(x = 5 \cdot 2^n)$ et comme ensemble d'arrivée $\mathbb{H}_{d+1} : x \in \mathbb{H}_{d+1} | \exists n \in \mathbb{N}^*(x = 7 \cdot 2^n)$

1. Toutes les branches/noeuds de l'arborescence composée par les suites (u_n) qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)

2. L'arborescence créer par toute les relation entre deux éléments k_d et k_{d+1} ; c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré ne sont pas bien fondé (56) car il existe plusieurs boucles.

Conclusion : Le points n°2 suffit à conclure que la conjecture pour $f(x) = 3x - 1$ est fausse car il existe plusieurs cycles.

4.4. $f(x) = 3x + 1$ (Conjecture de Syracuse)

Remarque : S'il existe un ou plusieurs cycles alors elles existent à partir de la racine d'un ensemble sur un élément pair d'un élément de la même arborescence, soit:

$$(57) \quad 3k_d + 1 = 2^m k_{d+n}$$

Et avec (50)

$$(58) \quad k_d = \frac{3^n k_{d+n} + 3^n - 2^n}{2^n}$$

En mettant en relation les deux équation précédente (57) et (58), on obtient :

$$(59) \quad 3 \frac{3^n k_{d+n} + 3^n - 2^n}{2^n} + 1 = 2^m k_{d+n}$$

(m) correspond au nombre de saut dans un ensemble et (n) correspond au nombre saut/degré d'un ensemble/arborescence à un autre :

$$(60) \quad \frac{33^n k_{d+n} + 33^n - 32^n}{2^n} + \frac{2^n}{2^n} = 2^m k_{d+n}$$

...

$$(61) \quad k_{d+n} = \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{2^{n+m} - 3^{n+1}}$$

Sachant que $a^n + b^n$ est divisible seulement par $(a - b)$ pour toutes les puissances n impaires uniquement alors :

$$(62) \quad k_d = 1$$

Quand $k_d = 1$ nous avons comme boucle/cycle : $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Il existe donc un seul cycle avec comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble $\mathbb{H}_0$ car $f(1) : \mathbb{H}_o \rightarrow \mathbb{H}_o$ c-à-d la racine de l'arborescence.

1. Toutes les branches/noeuds de l'arborescence composée par les suites (u_n) qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence crée par toutes les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} ; c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré sont pas bien fondé (62) car il n'existe qu'une seule boucle qui est incluse dans l'ensemble $\mathbb{H}_0$
3. L'arborescence recouvre l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (40)

Conclusion : Ces trois point suffisent à conclure que la conjecture pour $f(x) = 3x + 1$ est vrai car le domaine de définition : $S^{-1} : 2^n \rightarrow \mathbb{N}^*$ est vérifié

5. Etude de l'arborescence quand $q = 5$

5.1. Une densité de Schnirelmann $\rightarrow \frac{1}{2}$

Quand $q = 5$, l'ensemble racine admet un élément sur quatre comme solutions de la fonction réciproque $f(x) = 5x \pm 1$ par contre pour l'ensemble des éléments de chaque degré n'admet qu'un élément sur cinq.

Avec (8) la densité de Schnirelmann pour $\mathbb{H}_0$

$$(63) \quad \sigma(\mathbb{H}_0) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \frac{1}{4}$$

Avec (9) la densité de Schnirelmann pour chaque degré de l'arborescence $\mathbb{H}_d$

$$(64) \quad \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} = \frac{1}{5}$$

Soit avec (16) et (6)

$$(65) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$(66) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$$

$$(67) \quad \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_3 \oplus \dots) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{125} + \dots$$

$$(68) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Selon le théorème de Schnirelmann alors :

$$(69) \quad Si \sigma(\mathbb{G}) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ alors } (\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \neq \mathbb{N}^*$$

Conclusion : L'arborescence ne recouvre pas l'ensemble $\mathbb{N}^*$, il existe donc d'autres suites/cycle qui ne termine pas en 1 et il n'y a donc pas de sens à étudier le bien fondé de l'arborescence.

3.1.2 Conjecture de R.Crandal ($q \rightarrow \infty$)

La conjecture de R.Crandal revient à vérifier l'évolution de la densité $\sigma(\mathbb{G})$ de chaque arborescence quand ($q \rightarrow \infty$).

Quand $q = 1$

L'ensemble $\mathbb{H}_0$ a pour densité asymptotique :

$$(70) \quad \bar{d}(\mathbb{H}_0) = \underline{d}(\mathbb{H}_0) = \frac{1}{a} = 1$$

Les ensembles $\mathbb{H}_d$ ont pour densité asymptotique :

$$(71) \quad \bar{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d) = \frac{1}{q} = 1$$

Nous avons donc :

$$(72) \quad \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

Avec (7) et sachant que quand $x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty$ alors $x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty$

$$(73) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{d=0}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x} = 1$$

Quand $q > 1$

L'ensemble $\mathbb{H}_0$ a pour densité asymptotique :

$$(74) \quad \bar{d}(\mathbb{H}_0) = \underline{d}(\mathbb{H}_0) = \frac{1}{a}$$

Les ensembles $\mathbb{H}_d$ ont pour densité asymptotique :

$$(75) \quad \bar{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d) = \frac{1}{q}$$

Nous avons donc :

$$(76) \quad \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} \neq \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

Avec (7) et sachant que quand $x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty$ alors $x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty$

$$(77) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}$$

$$(78) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x}}{x} + \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}$$

Soit :

$$(79) \quad \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x}}{x} = \frac{1}{a}$$

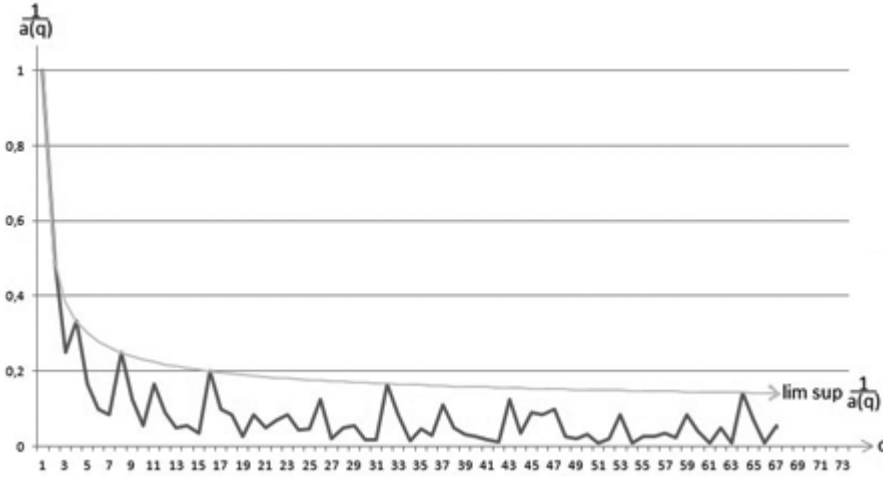
et

$$(80) \quad \lim_{x \in \mathbb{G} \rightarrow \infty} \frac{\sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x} = \sum_{d=1}^{\infty} \left(\lim_{x \in \mathbb{H}_d \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} \right)^d = \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^d$$

Au final avec (79) et (80):

$$(81) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \frac{1}{a} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^d$$

Ci-dessous le graphe de $a(q)$ [1] tel que $2n+1$ divise 2^m-1



La densité de chaque arborescence c-à-d $\sigma(\mathbb{G}) \rightarrow 0$ car quand $q \rightarrow 0$ alors:

$$(82) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} \right) \cong \lim_{q \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{1}{a(q)} \right) = \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\log(2)}{\log(q+1)} \rightarrow 0$$

$$(83) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^d \right) \rightarrow 0$$

Donc :

$$(84) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{a} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^d \right] \rightarrow 0$$

Sachant alors que quand $q > 3$:

$$(85) \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{2}$$

Et que :

$$(86) \quad \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^d < \frac{1}{2}$$

Au final quand $q > 3$:

$$(87) \quad \sigma(\mathbb{G}) = \frac{1}{a} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^d < 1$$

Conclusion : La conjecture de R.Crandal est donc vérifiée car aucune arborescence ne recouvre $\mathbb{N}^*$ car quand $q > 3$

REFERENCE

- [1] OEIS oeis.org/A002326

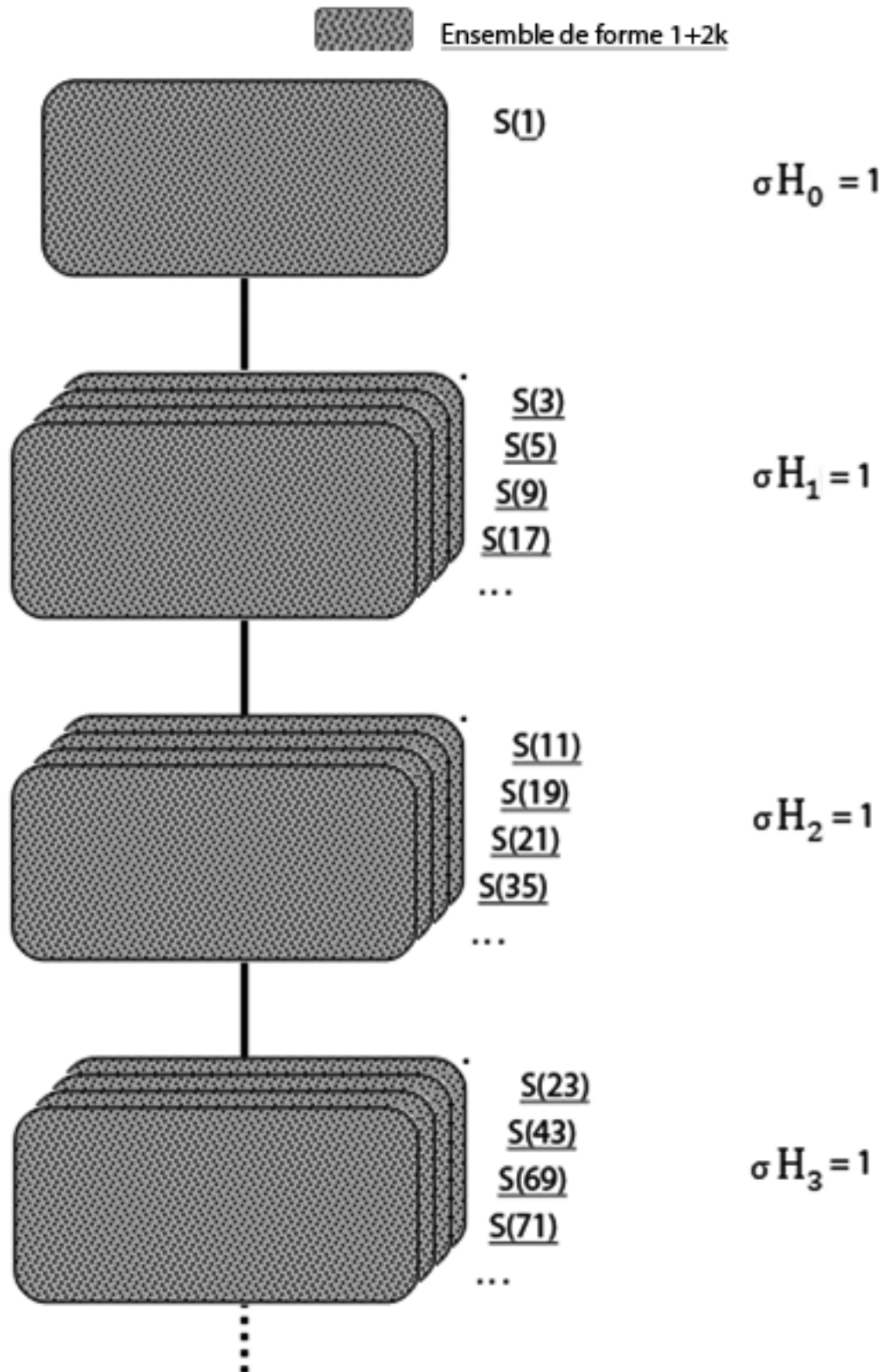
Figure 1: L'arborescence quand $q = 1$ et $f(x) = x - 1$ 

Figure 2: L'arborescence quand $q = 3$ et $f(x) = 3x + 1$

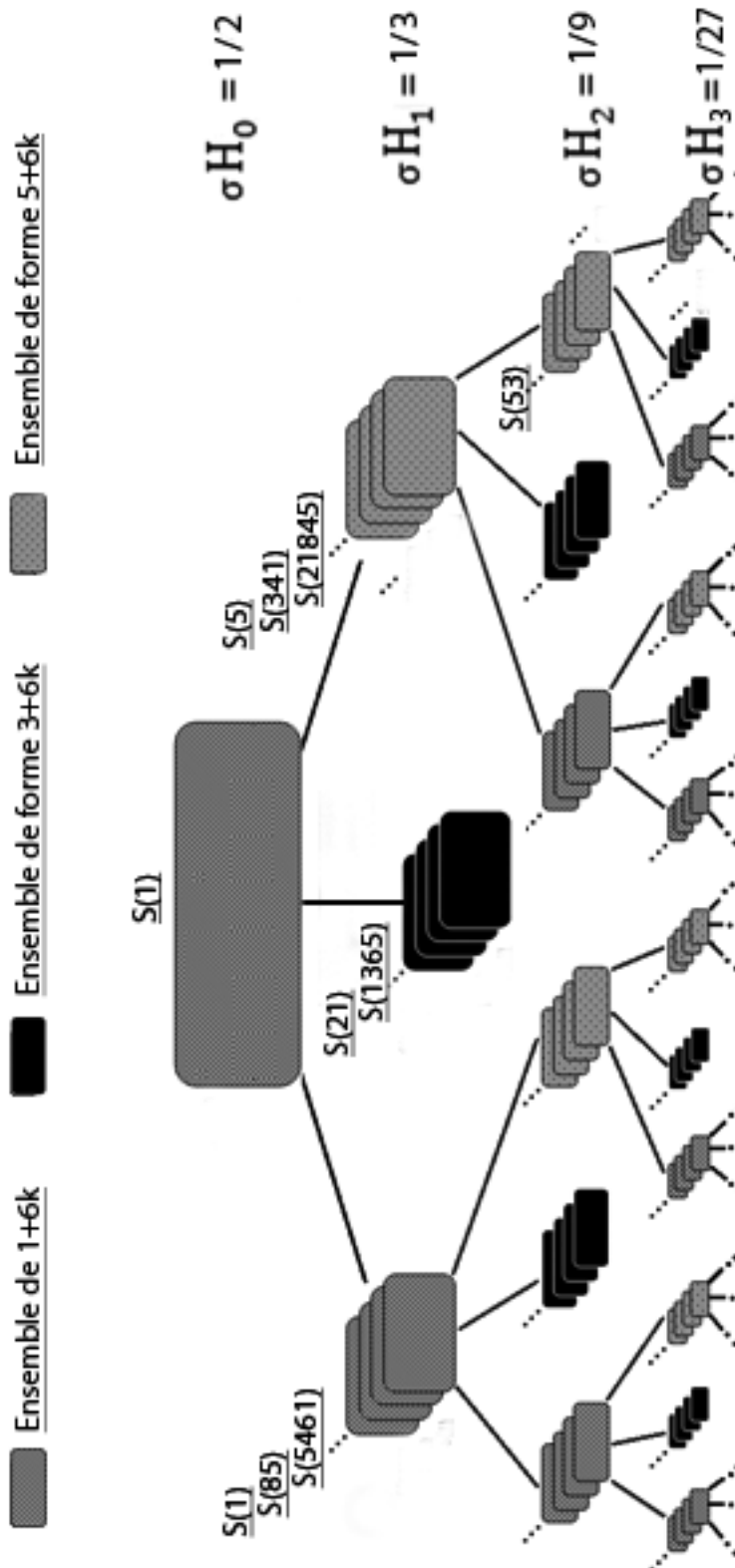


Figure 3: L'arborescence quand $q = 5$ et $f(x) = 5x + 1$

